Il ruolo delle misconcezione nella didattica della matematica

Silvia Sbaragli
N.R.D., Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
DFA, SUPSI, Locarno, Svizzera

Pubblicato in: Sbaragli S. (2012). Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica. In: Bolondi B., Fandiño Pinilla M.I. (2012). I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. 121-139. Napoli: Edises. ISBN: 9788865842188.

1. Il termine misconcezione

Un termine molto usato da decenni nella ricerca in didattica della matematica è la parola "misconcezione"; tale parola viene interpretata in modi diversi dai vari Autori ma assume nella maggior parte dei casi semplicemente connotati negativi, come sinonimo di "errore", "giudizio erroneo", "idea sbagliata", ma anche "equivoco" o "malinteso"; si trova intesa anche nel senso più esteso di "concezione fallace". Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.
Molti Autori concordano sul fatto che i primi usi di questo termine, nel senso di "errore" o di "malinteso", si hanno nel dominio della fisica o dell'economia. Si fa infatti riferimento di solito a lavori di Di Sessa (1983); di Kahneman e Tversky (a partire dal 1982) riguardo ai processi decisionali; di Voss et al. (1989).
Una delle prime apparizioni documentate del termine "misconception" in matematica avviene in USA nel 1981, ad opera di Wagner (1981), in un lavoro che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni; sempre nel 1981 esce un celebre testo di Kieran (1981) sull'attività di risoluzione delle equazioni. Appaiono poi numerosi lavori nel 1985 nei quali il termine "misconcezione" è esplicito: Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985) che lo usano per lo più a proposito di *problem solving,* insieme alle convinzioni o per spiegarne le interazioni.
In Silver (1985, pp. 255-256) è detto esplicitamente che vi è un forte legame tra le misconcezioni e le convinzioni errate.
In Schoenfeld (1985, p. 368) si evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda procedure.
Come si vede bene, nella prima metà degli anni '80 ci fu un intenso lavoro degli studiosi di didattica della matematica su questo tema.
In seguito diversi Autori hanno preso in esame in maniera critica il sostantivo misconcezione, per esempio nell'àmbito della Scuola Francese; in una lettera privata che ci ha gentilmente autorizzato a rendere pubblica, Colette Laborde dichiara:
«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti "non corretta". La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona

per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono» (riportato in D'Amore, Sbaragli, 2005, p. 12).
Tenuto conto delle posizioni dei diversi Autori e delle occorrenze a volte anche piuttosto diverse di questo termine, riteniamo che l'attenzione sulle misconcezioni, fin dal loro apparire nel mondo delle scienze (non matematiche) sia stato molto produttivo perché ha costretto gli studiosi a non identificare più gli errori come qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma ad interpretarli come prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione. Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare un significato condiviso di "misconcezioni" come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili ed a volte addirittura convincenti. In un testo del 1998, Rosetta Zan parla proprio di misconcezioni come "causa di errori": «Le *convinzioni specifiche* scorrette ("misconceptions") sulla matematica sono quelle responsabili di *errori*, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile».
È dunque innegabile il fatto che questo tipo di studi ha costretto a prendere in esame l'interpretazione della realtà da parte del soggetto, interpretazione creata sulla base di convinzioni maturate anche grazie all'apprendimento. Dunque a vedere le misconcezioni come il frutto di una conoscenza, non come una assoluta mancanza di conoscenza.
Da questo punto di vista, un altro approccio possibile, non lontano dalla posizione di Laborde e da noi scelto, è quello di conservare tale termine e di analizzarlo in modo più costruttivo, fornendogli un'interpretazione più elaborata e meno negativa che tenga conto dell'attuale ricerca in didattica della matematica e che permetta di indagare più in profondità le cause del mancato apprendimento. Inizialmente in D'Amore (1999, p. 124) e successivamente in D'Amore, Sbaragli (2005, p. 19) si parla di misconcezione non come situazioni del tutto o certamente negative, ma anche come possibili momenti di passaggio, in corso di sistemazione, a volte necessari per la costruzione di un concetto; è da questo punto di vista che affronteremo l'intero capitolo di questo testo.

2. Misconcezioni "evitabili" e "inevitabili"

Le misconcezioni intese in questo modo sono state da noi distinte in due grandi categorie: *inevitabili* ed *evitabili* (Sbaragli, 2005, p. 56 e succ.).
Le *misconcezioni inevitabili non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente né dall'ingegneria didattica*, ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo anche a causa dalle caratteristiche ontogenetiche legate all'allievo.

Tali misconcezioni sono quindi imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere iniziale da dover necessariamente comunicare in modo non ineccepibile.
In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come inevitabili momenti di passaggio nella costruzione dei concetti che derivano dalle rappresentazioni che gli insegnanti sono *costretti* a fornire per poter iniziare la presentazione di un concetto, rappresentazioni che potrebbero contenere delle informazioni ancora non del tutto corrette del concetto matematico che si vuole trattare.
In questo ambito c'è poi da dover tener conto di un fattore importante.
Nel presentare un concetto in matematica, si è *costretti* a fare ricorso a rappresentazioni realizzate per mezzo di segni, ossia alla semiotica; in linea con il pensiero di Duval (1993), affermiamo che: *non c'è noetica* (acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) e che la semiotica viene assunta come necessaria per garantire il primo passo verso la noetica. Detto in altro modo: «In matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche» (D'Amore, 2003).
Eppure, qualsiasi rappresentazione (un disegno, una frase, un grafico, un modello tridimensionale, …) non avrà mai le caratteristiche concettuali di astrattezza, idealità, perfezione, generalità tipiche della matematica e questo potrebbe essere la fonte di alcune di quelle misconcezioni che abbiamo chiamato inevitabili: «I modelli restano distinti dalla nozione stessa, non solo a causa dell'astrazione propria della nozione (passaggio dall'oggetto alla classe di oggetti) ma anche a causa dell'idealizzazione (passaggio dall'oggetto reale alla sua immagine ideale, mediante il passaggio intermedio del modello)» (Maier, 1995).
Tuttavia, dovendo fare i conti con la semiotica di un concetto, potrebbe accadere che lo studente confonda la semiotica con la noetica, associando le caratteristiche peculiari della specifica rappresentazione al concetto stesso: «(…) Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi *inevitabile*» (Duval, 1993).
Una delle cause del sorgere di certe misconcezioni è certo legata alla necessità della semiotica, ma spesso si tratta di misconcezioni inevitabili.

Le *misconcezioni evitabili* dipendono invece proprio dalle *scelte che l'insegnante fa per effettuare la trasposizione didattica* e scelte concernenti *l'ingegneria didattica*. Queste misconcezioni sono state assai studiate e sembrano dipendere dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi.
Capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, a volte derivanti dalle proposte della *noosfera* (libri di testo, programmi, riviste, …), di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente dall'allievo come univoche e anzi obbligate a causa del *contratto didattico* instaurato in classe e del fenomeno di *scolarizzazione* (D'Amore, 1999).

Le continue e univoche sollecitazioni fornite dall'insegnante fanno sì che lo studente confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere: «Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni» (D'Amore, 2003).
Ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta, ai contesti ed alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata.
Come vedremo negli esempi riportati nel paragrafo seguente, la ripetitività delle rappresentazioni fornite non rappresenta l'unica causa delle misconcezioni evitabili; queste possono dipendere dalle rappresentazioni scelte dall'insegnante stesso.

3. Alcuni esempi di misconcezioni evitabili e inevitabili

Per rendere più esplicita la distinzione tra misconcezioni inevitabili ed evitabili, riportiamo di seguito alcuni esempi di entrambe le categorie, prestando particolare attenzione alle evitabili, sulle quali è possibile intervenire preventivamente.

3.1. Esempi di misconcezioni inevitabili

Tra gli esempi di misconcezioni inevitabili si possono individuare quelli legati alle conseguenze dell'ampliamento di un insieme numerico.

In D'Amore e Sbaragli (2005) viene messo in evidenza come la formazione prematura di un modello concettuale di moltiplicazione, quando si ha a disposizione solo l'insieme N dei numeri naturali, genera spesso misconcezioni quando si passa ad un altro insieme numerico, tra le quali la più conosciuta e difficile da superare è "la moltiplicazione accresce sempre". Alla domanda posta a studenti di scuola media: "Quanto fa $4 \times 0,5$", diversi rispondono intuitivamente 8. Il tentativo di continuare ad applicare l'idea di accrescimento che si è creata in N quando la moltiplicazione viene eseguita sull'insieme Q dei numeri razionali, per esempio fra frazioni o fra numeri decimali, si rivela fallimentare. Non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari!) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra le due operazioni: 18×0.25 e $18:0.25$ la prima è quella che dà un risultato minore, manifestando così la presenza del modello scorretto sopra menzionato creatosi nella scuola primaria.
Da questo punto di vista, già in una ricerca molto datata di Hart (1981), alla richiesta di scegliere tra le seguenti coppie di operazioni quella che dà il risultato maggiore:

(a) 8×4	oppure	$8 : 4$
(b) $8 \times 0,4$	oppure	$8 : 0,4$
(c) $0,8 \times 0,4$	oppure	$0,8 : 0,4$

si sono avuti i seguenti risultati che evidenziano come meno del 20% degli allievi di 15 anni ha dato la risposta corretta.

	Esercizio			Età			
	(a)	(b)	(c)	12	13	14	15
Tipi di operazione scelta	:	:	:	13	8	15	18
	×	×	×	50	58	47	30

Riportiamo la giustificazione fornita da un ragazzo di 15 anni che inizialmente aveva segnato tutte le moltiplicazione e poi ha corretto: «Perché con le moltiplicazioni sembra di ottenere sempre di più di quando si divide».

Analogo a questo esempio è il seguente riportato da Stavy e Tirosh (2000) che ha origini nella scuola primaria e si ripercuote nei livelli scolastici successivi: «In matematica, alcune proprietà spesso funzionano per sistemi fino a un certo numero, ma crollano quando la realtà dei numeri si fa più estesa. Ad esempio, quando confrontiamo due numeri naturali mediante la linea dei numeri, si potrebbe affermare che *il numero più lontano dallo zero sia il numero più grande.* Quando viene applicata ai numeri relativi, tuttavia, questa regola può spingerci, non correttamente, a stabilire, ad esempio, che –5 è più grande di –2 perché "esso è più lontano dallo zero". La regola "il più lontano - il più grande" è valida per tutti i numeri naturali, ma non per quelli relativi».
Tale misconcezione può essere interpretata come inevitabile a meno che l'insegnante, invece di cercare di superarla e di non radicarla nella mente dello studente, la espliciti e confermi nel momento in cui tratta i numeri interi.
Si può notare che gli studenti arrivano alla stessa conclusione sbagliata anche quando non tengono conto del ruolo del segno meno, riferendosi unicamente al valore assoluto del numero.
Le due Autrici appena citate, proseguono riportando i seguenti esempi:
«In generale, quando due numeri naturali, n e $n+a$ (anche a è un numero naturale), vengono confrontati, gli studenti, sin da piccoli, sanno che $n+a>n$. Molti studi sull'educazione matematica riportano che quando si chiede di confrontare una coppia di espressioni numeriche o algebriche (…), spesso gli studenti applicano in modo non corretto la loro conoscenza dei numeri naturali (…) (Bell, 1982; Fischbein, 1987; Hart, 1981). Quando chiedemmo di confrontare due espressioni ad esempio, $4x$ e $2x$ (…), gli studenti dedussero che (…) $4x>2x$. Allo stesso modo, quando (gli allievi) confrontano due espressioni comprendenti n e $n+a$, essi affermarono che: "$-(n+a)>-n$, $x(n+a)>xn$, $(n+a)^x>n^x$, $x^{(n+a)}>x^n$, e così via". (…) Gli studenti deducono che, poiché $n+a$ è maggiore di n, il senso dell'ineguaglianza tra le intere espressioni (…) sarà conservato».

Interessanti da questo punto di vista risultano anche i seguenti esercizi di confronto di espressioni algebriche che furono proposti da Rapaport (1998) a studenti dalla prima alla quarta superiore:

Segna >, =, < oppure "impossibile da determinare"

4x □ 2x

3(a+b) □ 2 (a+b)

3x/2 □ 5x/2

Questo lavoro rivelò che un'ampia maggioranza di allievi in ciascuna classe fornì risposte sbagliate del tipo: «4>2, perciò 4x>2x; 3>2, perciò 3(a+b)>2(a+b); 5>3, perciò 5x/2>3x/2».

Situazioni analoghe possono essere pensate per le potenze. Ad esempio, Kopelevich (1997) chiese ad allievi di seconda media, prima, seconda e terza superiore di confrontare le seguenti espressioni:

1. Rami sostiene che se t è maggiore di m (t > m), allora $a^t > a^m$. Ha ragione Rami? Sì/No.

1. Dana sostiene che se a è maggiore di b (a > b), allora $a^t > b^t$. Dana ha ragione? Sì/No.

Anche in questo caso, almeno il 50% degli allievi di ognuna di queste classi eseguì in maniera sbagliata ciascuno di questi problemi, affermando che se t > m, allora $a^t>a^m$ e che se a > b, allora $a^t>b^t$. Eppure quando venne chiesto agli stessi studenti di mettere il simbolo giusto (>, =, < oppure "impossibile da determinare") tra le espressioni a^3 e a^4, oltre il 65% di allievi di ciascuna di queste classi affermò che $a^4>a^3$.

Sempre a proposito di potenze, più recentemente, le prove Invalsi del 2010 somministrate in I media hanno messo in evidenza come gli allievi tendano a trasferire regole già apprese in altri ambiti (addizione di numeri naturali, somma degli esponenti delle potenze quando si moltiplicano potenze con la stessa base), senza cogliere il cambio di contesto.

A quale valore corrisponde il risultato della seguente operazione?

$$2^3 + 2^6$$

A. 512 (6%)
B. 2^9 (41%)
C. 72 (41%)
D. 2^{18} (11%)

Si nota un'ampia percentuali di risposte scorrette alcune derivanti dalla somma degli esponenti delle potenze.

Risultano inoltre numerose le misconcezioni legate al concetto di numero razionale (Fandiño Pinilla, 2005). L'idea di "successivo" di un numero che l'allievo ha appreso e usato con successo nell'insieme N dei numeri naturali e che estende intuitivamente a tutti gli altri domini numerici comporta che per diversi allievi il "successivo" di 0,2 sia 0,3, così come nella forma frazionaria il successivo di 2/5 è per alcuni studenti 3/5, perché il 3 è il successivo di 2 in N.

Emergono di conseguenza difficoltà nell'ordinare i numeri razionali. Per esempio, la frazione 2/3 è considerata minore di 4/9 perché 2<4. Questa "giustificazione" ha un'analogia sviante nell'ordine tra numeri decimali: 2,3<4,9 perché 2<4.
Le letteratura specifica dimostra che anche adulti con un buon livello di scolarizzazione tendono a non saper ordinare le frazioni sulla retta numerica perché si basano essenzialmente sul confronto dei numeratori delle frazioni o sul concetto che più grande è il denominatore, più piccola sarà la frazione.
Inoltre, se si tratta di mettere in ordine 1,2 e 1,15, è noto che la competenza acquisita sui naturali può dare problemi interpretativi; la letteratura segnala casi in cui lo studente afferma: «A parità di parte intera, siccome 15>2, allora 1,15>1,2».
Non sempre si rivela naturale scrivere 1,3 nella forma 1,30; ad impedire la naturalezza di questo passaggio sta anche una regola acquisita precedentemente, in base alla quale aggiungendo uno 0 "in fondo" ad un numero lo si moltiplica per 10; anche in questo caso, una regola valida in N viene erroneamente ed impropriamente estesa ai numeri razionali.
Fin dagli anni '60, la letteratura segnala inoltre studenti che non sanno gestire l'equivalenza tra frazioni.
Come riporta Fandiño Pinilla (2005), sono state sottoposte a studenti di età variabile le seguenti uguaglianze, nelle quali dovevano riempire i posti mancanti e si è rilevato come (a1) e (b1) siano più facili da gestire che non le altre e che ancora a 15 anni, meno del 30% degli studenti sa risolvere con sicurezza (b2):

$$\text{(a1)}\ \frac{1}{3}=\frac{2}{\nabla}, \qquad \text{(a2)}\ \frac{4}{12}=\frac{1}{\lozenge};$$
$$\text{(b1)}\ \frac{2}{7}=\frac{\Delta}{14}, \qquad \text{(b2)}\ \frac{2}{7}=\frac{\Delta}{14}=\frac{10}{\triangleright}.$$

Le ricerche hanno anche messo in evidenza come lo studente faccia fatica a capire il senso dell'equivalenza nei casi discreti; se abbiamo 3 palline bianche e 6 nere, possiamo dire che le bianche sono 1/3 del totale delle palline; ma se abbiamo 6 bianche e 12 nere, lo studente potrebbe faticare a capire che, all'aumento evidente del numero di palline, non corrisponda anche un aumento di quel "1/3".
Questa stessa misconcezione si presenta quando si deve valutare la probabilità di un evento. In particolare, come sostiene Fischbein (1975) nei problemi in cui intervengono numeri, le valutazioni di probabilità sono influenzate dalla grandezza dei numeri considerati. Per esempio, di fronte alla seguente situazione:
Nell'urna A vi sono 3 palline bianche e 5 nere.
Nell'urna B vi sono 6 palline bianche e 10 nere.
Dovrai pescare una pallina da un'urna a tua scelta: se sarà bianca, avrai un premio. Da quale urna preferiresti pescare?
La maggior parte degli allievi risponde senza esitazione «dalla B».

Risulta inoltre interessante sottoporre gli allievi alla seguente situazione: *Ho la frazione x/y e divido tanto x quanto y per 2. Ottengo una nuova frazione. Questa è la metà di x/y, uguale a x/y o il doppio di x/y?*
Le risposte più diffuse sono "la metà" e "il doppio" a qualsiasi età, mentre la risposta "uguale" è assai scarsa, specie tra gli allievi più giovani.
Non distante da questo esempio è il seguente. Nel Test Prometeo del 1994 somministrato in I Liceo, alla domanda posta agli allievi: "Quanto è il doppio di ¾?" si sono avuti i seguenti risultati:

A. 3/8 (5%)
B. 6/8 (69%)
C. 5/4 (2%)
D. 3/2 (24%)

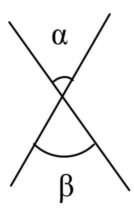
Gli esempi potrebbero continuare ancora a lungo, ma terminiamo qui questa trattazione per non appesantire troppo il testo.

3.2. Esempi di misconcezioni evitabili

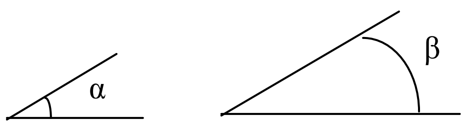
3.2.1. Misconcezioni evitabili dipendenti da rappresentazioni semiotiche univoche e vincolanti. L'esempio dell'angolo

Tra gli esempi di misconcezioni evitabili vi sono quelli che dipendono dalla scelta univoca delle rappresentazioni semiotiche fornite dagli insegnanti, a volte in contrasto con la definizione scelta. Emblematico da questo punto di vista risulta l'esempio dell'angolo.

Come riferiscono Tirosh e Stavy (2000), sono diverse le ricerche che si sono occupate delle misconcezioni relative agli angoli. Ad esempio, se si mostra il seguente disegno ad allievi dalla scuola dell'infanzia alla scuola superiore e si chiede di stabilire se i due angoli sono uguali o ce n'è uno più "grande" dell'altro, molti allievi rispondono: «L'angolo β è più grande dell'angolo α perché il suo arco è più lungo».



La stessa situazione si presenta, ma con una percentuale inferiore di risposte sbagliate, proponendo le seguenti domande inerenti le due figure sotto rappresentate:
gli angoli α e β sono uguali? Se non lo sono, qual è il più "grande"? Perché?



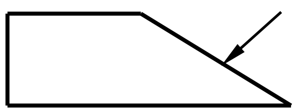
Si nota quanto la rappresentazione semiotica possa essere fuorviante per stabilire relazioni fra le ampiezze degli angoli.
Più recentemente, i risultati di ricerca ottenuti da Sbaragli e Santi (2011) mostrano come le decisioni prese dall'insegnante per presentare l'argomento angolo, si basano su proposte univoche e vincolanti derivanti dalla noosfera, più che da scelte personali consapevoli, e vertono sul fornire all'allievo sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali senza analizzarne i tratti distintivi con gli allievi.
Altra importante causa di difficoltà sulla quale si è concentrata in modo specifico la ricerca di questi due Autori sono le incoerenze nell'intenzionalità degli insegnanti derivanti da un uso limitato e inconsapevole dei mezzi semiotici di oggettivazione (ad esempio l'archetto dell'angolo che limita la parte di piano) rispetto all'aspetto concettuale e culturale del sapere al quale si vuole solitamente far giungere i propri allievi (definizione di angolo come parte di piano limitata da due semirette con l'origine in comune). La complessità dell'apprendimento del concetto di angolo da parte degli allievi, messa in evidenza dalla numerosa letteratura di ricerca, è quindi amplificata dalle scelte dell'insegnante riguardanti la trasposizione didattica del sapere e l'ingegneria didattica adottata.
L'intenzionalità attribuisce all'individuo, in questo caso all'insegnante, un ruolo fondamentale nella possibilità di attribuire senso agli oggetti matematici, ma tale intenzionalità deve essere gestita con consapevolezza per poter essere efficace didatticamente. L'incoerenza tra l'intenzionalità esplicitata dall'insegnante tramite il mezzo di oggettivazione verbale e il mezzo di oggettivazione grafico, scelti per esprimere tale concetto, può essere la fonte di misconcezioni evitabili nella mente dell'allievo. La scelta dei segni non è neutra o indipendente; come sostiene Radford (2005, p. 204): «I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. (…) Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza», tale individuazione va gestita con forte senso critico da parte dell'insegnante.
Risulta quindi indispensabile per il superamento di *misconcezioni inevitabili* e l'assenza di *misconcezioni evitabili*, fornire una grande varietà di mezzi semiotici di oggettivazione opportunamente organizzati e integrati in un sistema sociale di significazioni rappresentato dalle pratiche matematiche condivise dagli allievi gestite con consapevolezza e coerenza da parte dell'insegnante.

3.2.2. Misconcezioni dipendenti da termini linguistici che vincolano le posizioni delle figure

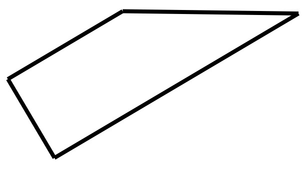
Sembra ormai una prassi scolastica legare l'apprendimento geometrico a termini spaziali che derivano dalla posizione dalla quale si osserva un oggetto matematico. Termini come: orizzontale, verticale, obliquo, laterale, … sono presenti su tutti i libri scolastici di qualsiasi livello scolastico e appaiono come parole specifiche dell'àmbito

matematico, pur rientrando in realtà in altri contesti. Eppure tali termini che generano posizioni spaziali vincolanti delle figure sono la fonte di misconcezioni evitabili.
È pur vero che, come sostengono Tirosh e Stavy (2000): «è stato affermato che le linee verticali e orizzontali costituiscono le direzioni fondamentali su cui gli oggetti possono essere orientati in relazione alla gravità. Evidentemente, la percezione delle linee verticali e orizzontali è programmata nel sistema visivo dei mammiferi»,[1] ma l'uso di questi termini in campo geometrico mette in evidenza la scelta della noosfera di dare più peso alla posizione dell'oggetto del quale si sta parlando, piuttosto che all'essenza dell'oggetto stesso. Invece di rilevare le caratteristiche "assolute" dell'oggetto matematico, come il parallelismo, la perpendicolarità, la congruenza dei lati o degli angoli, …, si mettono in evidenza le proprietà "relative" dell'oggetto, che dipendono dal punto di vista, facendo così puntare l'attenzione degli studenti su caratteristiche concrete, dirette e percepibili, importanti in un contesto di vita reale, ma di ostacolo in un mondo geometrico dove non esistono "direzioni privilegiate".

I lati obliqui. Una convenzione accettata da anni da quasi tutto il mondo della scuola italiana, e per questo presente in tutti i libri di testo, è quella di chiamare il lato del trapezio, indicato nel seguente disegno, con il nome di "lato obliquo".



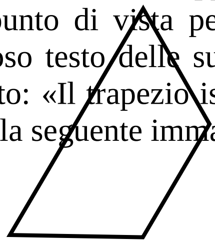
Questa scelta risulta costruttiva per l'apprendimento degli allievi o fonte di misconcezioni?
A nostro parere tale scelta crea nella mente degli allievi misconcezioni evitabili, dato che essa vincola la posizione da far assumere all'oggetto. Nella seguente figura, che rappresenta un trapezio congruente a quello della figura precedente ma disposto in modo diverso rispetto ai margini del foglio, tutti i lati risultano obliqui rispetto al lettore, proprio tranne quello che per convenzione è chiamato obliquo.



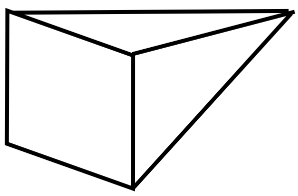
A questo punto lo studente potrebbe non riconoscere più il trapezio o per farlo potrebbe doverlo riportare nella posizione da lui considerata standard: con il lato che è stato etichettato come obliquo disposto in modo che lo sia effettivamente rispetto al proprio punto di vista.

[1] Le due Autrici rimandano a: Lindsay P., Norman D., *L'uomo elaboratore di informazioni*, Firenze: Giunti, 1968.

Tali misconcezioni sono evitabili in quanto dipendono dalla scelta linguistica dei termini che danno maggiore risalto alla posizione assunta dall'oggetto del quale si sta parlando, piuttosto che all'essenza dell'oggetto stesso, valorizzando così saperi esterni al contesto della matematica che bloccano l'apprendimento concettuale corretto.
Esempi così vincolanti dal punto di vista percettivo, sono presenti nei libri di ogni livello scolastico. In un famoso testo delle superiori del 2002 edito da una nota casa editrice di Bologna, vi è scritto: «Il trapezio isoscele è un trapezio che ha i lati obliqui congruenti». Escludendo così la seguente immagine dai trapezi isosceli.



La parola *base* nello spazio. Molti insegnanti introducono la parola "base" nello spazio, affermando che è la faccia sulla quale "appoggia" il solido. Allo stesso tempo, ai solidi vengono dati particolari nomi, del tipo: "piramide a base quadrata", "prismi a basi triangolari", …
Queste scelte didattiche congiunte possono provocare misconcezioni evitabili, dato che vincolano la posizione che deve assumere il solido nello spazio. Eppure, ciò che si dovrebbe auspicare in àmbito geometrico è che lo studente riesca ad osservare le proprietà matematiche dell'oggetto, invarianti rispetto alla posizione assunta: «La geometria non consiste nel descrivere ciò che si vede ma nello stabilire ciò che "deve" essere visto» (Brousseau, 2005).
Ne consegue che, nella logica di ciò che gli insegnanti intendono per "base" nello spazio e dei termini che vengono comunemente utilizzati per parlare dei poliedri, è possibile giustificare il seguente episodio avvenuto durante una sperimentazione nella scuola media.
In una III media, dopo aver disposto un modello di piramide quadrangolare con una faccia triangolare appoggiata sulla cattedra, si è chiesto di quale solido si trattasse.



Una studentessa ha risposto immediatamente: «Non so che cosa sia, ma se lo rigiri diventa una piramide a base quadrata» (intendendo: con la faccia quadrata appoggiata sulla cattedra).
In questo caso la proposta della studentessa risulta coerente con ciò che le è stato insegnato: la base è la faccia sulla quale "appoggia" il poliedro, quel solido si chiama "piramide a base quadrata" solo se "appoggia" sulla faccia quadrata. Eppure in

matematica non vi sono piani di "appoggio", ogni faccia può essere considerata come "base", indipendentemente da come è disposta nello spazio. La "base" può essere una qualsiasi faccia sulla quale si presta l'attenzione, così come, nel piano, la "base" di un poligono può essere un qualsiasi lato, comunque disposto rispetto ai margini del foglio o al punto di vista del lettore.

E così, come conseguenza dell'aver richiesto che la base di una figura geometrica sia disposta orizzontalmente rispetto al lettore, l'altezza diventa esclusivamente posizionata verticalmente, creando così anche una misconcezione relativa all'altezza. Quest'ultima misconcezione, specifica del contesto matematico, deriva dal mondo reale, dato che in questo àmbito si parla di solito di altezza come quella distanza che viene individuata tramite la direzione del filo a piombo: verticale dal punto di vista dal quale tradizionalmente si osserva il mondo. Come sostiene Hultin (1974): «Quando si tratta di passare da un semplice riconoscimento percettivo all'analisi delle proprietà di una figura, la tentazione, per l'insegnante, di proporre l'esplorazione sistematica e successiva di ogni figura geometrica, è grande. Questo modo di considerare le cose presenta l'inconveniente di rendere più difficile l'acquisizione di proprietà nel loro significato più generale».

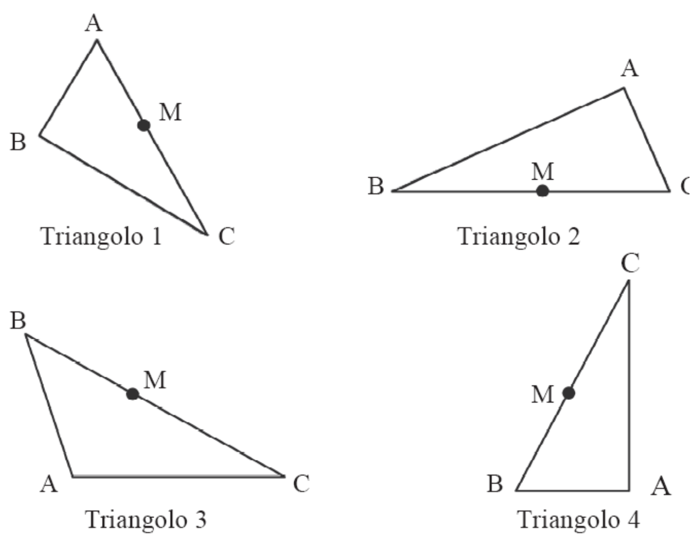
Al contrario di quanto siamo portati a credere, la presenza dell'oggetto assunto come modello per aiutare la comprensione del concetto può esasperare il riferimento a caratteristiche legate alla percezione che causano deformazione nella costruzione concettuale.

Sembra di poter affermare che termini "relativi" legati alla posizione assunta dall'oggetto rispetto all'osservatore, costituiscono la fonte di misconcezioni evitabili che vincolano l'apprendimento geometrico.

I risultati delle prove Invalsi proposti nella scuola media evidenziano le difficoltà che derivano dall'uso vincolante dei termini e dal rappresentare le figure sempre in posizione standard. Alla seguente domanda risponde correttamente solo il 68% degli allievi di prima media, nonostante il triangolo corretto fosse quello in posizione canonica.

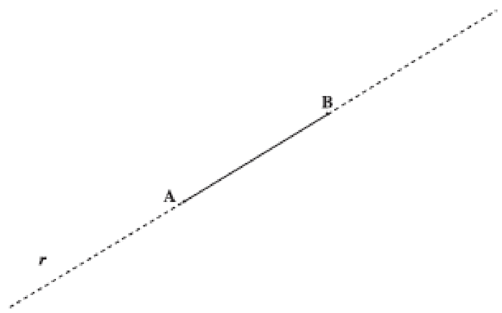
D16. Indica quale dei seguenti triangoli corrisponde a questa descrizione:

ABC è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in A.
Il cateto AB è minore del cateto AC.
M è il punto medio dell'ipotenusa.



La stessa percentuale di risposte scorrette rimane anche quando nelle prove Invalsi di terza media si chiede di disegnare un triangolo rettangolo, “imponendo” una posizione non standard.

D12. **Qui sotto vedi una retta *r* sulla quale sono segnati due punti A e B. Disegna un triangolo rettangolo ABC in modo tale che il segmento AB sia un cateto. Indica con una crocetta l’angolo retto del triangolo.**



Ovviamente, riteniamo che la geometria debba essere considerata come uno strumento utile per la lettura del mondo che ci circonda, una modellizzazione dello spazio materiale nel quale siamo immersi, ma sosteniamo che un obiettivo che si deve raggiungere in àmbito geometrico è che lo studente riesca ad osservare un oggetto matematico nella sua “essenza”, analizzando con elasticità le sue peculiari caratteristiche. Questo è possibile solo se non si assoggetta l’apprendimento a rigidi vincoli spaziali; in effetti, se ci si abitua ad osservare ed analizzare gli oggetti, indipendentemente dalla posizione che essi assumono, si è poi più abili a riconoscere e analizzare la situazione anche al cambiare della proposta. In definitiva, si diventa più capaci di modellizzare la realtà e di dominare le situazioni spaziali in tutta la loro complessità.

3.2.3. Misconcezioni derivanti da “incoerenze” nei libri di testo

Riportiamo di seguito un esempio di misconcezioni evitabili che può essere interpretato come conseguenza dell’incoerenza dell’ingegneria didattica.
In molti libri di testo viene presentata la definizione di quadrato a partire dal rombo e viene mostrato come la richiesta che evidenzia la “differenza specifica” tra il “genere prossimo” rombi ed il “sottogenere” quadrati riguarda solo l’ampiezza degli angoli (che devono essere tutti congruenti), quindi si sostiene che il quadrato è un particolare tipo di rombo. Nello stesso testo in seguito si parla delle diagonali del rombo e si afferma: «Sono una più lunga dell’altra. Quella più lunga è detta diagonale maggiore che si indica con D, quella più corta diagonale minore che si indica con d». L’incoerenza sorge fornendo le due contrastanti informazioni: il quadrato è un caso particolare di rombo - in un rombo le diagonali hanno sempre lunghezze diverse.
Sempre a proposito del rombo, spesso non si tiene conto delle conseguenze che si hanno concependo il rombo come caso particolare di parallelogramma: «un parallelogramma

con i lati della stessa lunghezza»; questo comporta che, per trovare l'area del rombo, è possibile applicare la formula dell'area del parallelogramma: lunghezza di un lato per la relativa altezza, piuttosto che coinvolgerne obbligatoriamente le lunghezze delle diagonali.

Le misconcezioni che spesso manifestano gli allievi possono quindi derivare dalle scelte didattiche effettuate dall'insegnante che, come abbiamo messo in evidenza in questo capitolo, a volte risultano incoerenti o improprie; per questa ragione è importante che ogni insegnante ripensi criticamente alla trasposizione didattica da effettuare e alla ingegneria didattica che intende proporre in classe.

4. L'"errore": un termine da reinterpretare

Come abbiamo rilevato in tutto il capitolo, l'esplicitazione da parte dell'allievo di una misconcezione avviene con quella *segnalazione di un malessere cognitivo* che si chiama usualmente e banalmente "errore": lo studente sbaglia, cioè non dà la risposta attesa dall'insegnante. Per una trattazione più approfondita del ruolo dell'errore si veda D'Amore (1999).
Dare agli *errori* sola connotazioni negative e non interpretarli come segnali di malessere cognitivo, appunto, è troppo semplicistico e banale: non si tratta solo di valutare negativamente lo studente che sbaglia; si tratta, invece, di dare gli strumenti necessari per l'elaborazione critica.
Ci serviamo di Fischbein (1985): «Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. A nostro parere, così come avviene nei processi psicoanalitici, lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti. Ciò può essere fatto discutendo con gli studenti gli errori dovuti specificatamente all'intuizione e cercando insieme a loro l'origine di questi errori. In ogni caso, questo processo di chiarificazione verbale non è sufficiente. Gli studenti devono sviluppare la capacità di analizzare le loro risposte, di rendere esplicite il più possibile le loro supposizioni implicite, di usare le strategie formali per verificare tali supposizioni intuitive».
Sta al docente, rendersi conto che quelle che lo studente crede essere concezioni corrette, sono in realtà delle misconcezioni.
Come riportato in D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sbaragli (2008, p. 51): «L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non *tiene* alla prova di fatti più contingenti o più generali».
Dunque, non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, ma della evidenziazione di difficoltà nel senso sopra citato. Queste considerazioni hanno portato la ricerca in didattica della matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore ed il suo ruolo.

A tal proposito Zan (2002) riferendosi alle misconcezioni afferma:
«Gli studi in quest'area sono accomunati dall'enfasi su alcuni aspetti, che li differenzia in modo netto dagli studi precedenti sull'analisi degli errori (…):

- la motivazione a capire le radici dei misconcetti, e non solo ad eliminarli
- lo sforzo di assumere il punto di vista di chi apprende, piuttosto che quello dell'esperto
- l'accettazione della ragionevolezza dei misconcetti e quindi la necessità che l'allievo ne percepisca i limiti come pre-requisito per modificarli».

A nostro parere l'esplicitazione agli allievi delle possibili misconcezioni e la proposta di attività pensate da questo punto di vista, permette di prevenire la nascita della loro formazione o il loro superamento; l'insegnante deve cioè svolgere il ruolo cruciale di organizzatore di situazione adeguate a portarle alla luce. Per fare questo, è possibile trarre suggerimenti dalla ricerca in didattica della matematica che negli ultimi trent'anni ne ha evidenziato numerose tipiche. Risulta inoltre importante che l'insegnante strutturi strategie didattiche di carattere trasversale per la prevenzione e il superamento delle misconcezioni, principalmente allo scopo di sviluppare consapevolezza e processi di controllo efficaci negli allievi.
Da questo punto di vista emerge il delicato e difficile ruolo che svolge quotidianamente l'insegnante in classe e che lo rende un professionista del processo di insegnamento/apprendimento.

Bibliografia

Brousseau G. (2005). Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica.* 49, 39-56.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Di Sessa A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In: Gentner D., Stevens A. (eds.) (1983). *Mental models*. Hillsdale, N.J.: Laurence Erlabaum. 15-33.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5, 37-65.

Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de l'École d'été 1995*. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica.* 3, 1996, 250-269].

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fischbein E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht (Olanda): D. Reidel Publishing Company.

Fischbein E. (1985). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.
Hart K.M. (a cura di). (1981). *Children's understanding of mathematics.* London: John Murray.
Hultin R. (1974). *L'enseignement de la mathématique*. Delta: Vevey.
Kahneman D., Tversky A. (1982). On the study of statistical intuitions. In: Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (eds.). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press. 493-508.
Kieran C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics*. 12, 317-326.
Kopelevich S. (1997). *Wrong use of the intuitive rule: «More of A-more of B» in power.* Tesi di Master non pubblicata. Università di Tel Aviv.
Maier H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*. 1995, 3, 298-305.
Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.
Rapaport A. (1998). *Use of intuitive rule: «More of A-more of B» in comparing algebraic expressions.* Tesi di Master non pubblicata. Università di Tel Aviv.
Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71.
Sbaragli S., Santi G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*. Rivista online:
http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196
Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.
Shaughnessy J.M. (1985). Problem-Solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving*: *Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 399-415.
Silver E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving*. *Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 247-266.
Stavy R., Tirosh D. (2000). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.
Voss J. F., Blais J., Means M.L., Greene T.R., Ahwesh E. (1989). Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naïve and novice individuals. In: Resnick L.B. (ed.) (1989). *Knowing, learning and instruction: Essays in honor of Robert Glaser.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 217-250.
Wagner S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for research in mathematics education*. 12, 107-118.
Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.

Zan R. (2002). *Verso una teoria per le difficoltà in matematica. Contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica.* Materiale del Seminario Nazionale 2002.